독립심화학습 5주차

2017103580 김정운

Min(J(x)=∫L(x,u,t)dt) subject to dx/dt=f(x,u,t), x(t0)=a, x(tf)=b…(1)와 같은 optimal control problem을 가정하자. 만약 ‘∃ϕ(x,t) s.t J(x,u,t)>=∂ϕ/∂t+(∂ϕ/∂x)\*f(x,u,t)…(2) and 등호는 최적해 x\*일 때만 성립…(3)’이 참이라고 한다면, ϕ를 verification function이라고 하며 (2)를 헤밀턴-야코비 부등식이라고 한다. Verification function의 존재성은 optimal control solution의 존재성과, 두 조건을 만족하는 해가 global optimal하다는 것을 보장한다. 부등식 양변을 t에 대해 적분하면 LHS=J(x) and RHS=∫ϕ(t,x)dt가 되는데, 이는 ∫ϕ(t,x)dt의 최댓값을 산출하는 control u가 global optimal이라는 것을 의미한다.

이러한 verification function에 대한 정보를 가지고 특정 방정식을 유도할 수 있다. (1)과 같은 가정하에서 (2) 양변에 J(x,u,t)를 뺸다고 하면, ∂ϕ/∂t+(∂ϕ/∂x)\*(f(x,u,t)-J(x,u,t)<=0이 된다. 양변에 u에 대해 sup을 취하면 ∂ϕ/∂t+sup{(∂ϕ/∂x)\*(f(x,u,t)-J(x,u,t))=0이 되고, 두번째 항을 헤밀토니안 H(ϕ,f)라고 한다면, ∂ϕ/∂t+H(ϕ,f)=0이 된다. 해당 방정식을 성립하게 하는 ϕ가 존재한다면, 이에 대응되는 control u는 globally optmal하다. 이는 크래머-라오의 정보부등식에서 등식을 만족하는 통계량이 최소분산-비편향추정량이라는 것과 비슷한 맥락을 가지고 있다.

여기서 ϕ는 유일하지 않을 수 있지만 가장 많이 사용하는 함수는 inf(J(x))인데, 이는 optimal control의 존재성이 보장된다면 infimum의 정의상 타당하다. inf(J(x)를 value function V(x)라고 하며, 이때 방정식 ∂V/∂t+H(V,f)=0을 Hamilton-Jaccobi-Bellman(HJB) 방정식이라고 한다. Verification function으로부터 해당 방정식이 유도되었기 때문에, HJB 방정식을 만족하는 해 V가 미분가능해야 방정식으로부터 global optimal control을 얻을 수 있다(verification function을 미분으로 정의했기 때문이다). 하지만 함수의 infimum에 대한 미분가능성을 증명하기 쉽지 않다.

이러한 문제를 해결할 수 있는 방법은 몇 가지 있는데, 그 중 하나는 헤밀턴-야코비 부등식을 만족하는 함수 ϕ가 locally Lipchitz function for a.e on open domain이면 J(x)>=limsup(ϕ(b-e,x(b-e))- ϕ(a-e,x(a-e)) as e->0가 성립한다는 것이다. 이 때 등호를 성립시키는 control u는 essentially global optimal control이다. 또 다른 방법은 value function가 아닌 lyapunov time-invariant function V를 찾는 것이 있으며, 이는 optimal control와 optimal state가 미분방정식의 equilibrium에 대해 locally stable하다는 것을 증명하는데 유용하다. 왜냐하면 많은 제어문제들이 state가 특정 값으로 수렴한다는 것을 목적으로 두고 있기 때문이다.

HJB방정식은 sup으로 인해 도함수가 연속인 해를 갖지 않은 경우가 많으며, 이를 극복하기 위해 proximal solution과 viscosity solution을 사용한다. u:[0,∞]xR^n->R가 “경계조건을 만족하고 ∀(t, x) ∈ (0,∞)×Rn, (θ,ζ) ∈ 에 대해 θ+H(x,ζ)=0“가 성립하면, u는 방정식 ∂V/∂t+H(V,f)=0에 대한 proximal solution이다. 이때 는 proximal sub-gradient of u at x라고 하며, {z| for some a(x,z) >=0, ∀y∈B(x,z), u(y)-u(x)+a||y-x||^2>=<z,y-x>}으로 정의된다. 또한 경계조건을 만족하는 v가 “∀(θ,ζ)∈=>θ+H(x,ζ)>=0 and ∀(θ,ζ)∈ =>θ+H(x,ζ)<=0”을 만족하면, v를 방정식 ∂V/∂t+H(V,f)=0에 대한 visocity solution이라고 한다.

이때 ()는 Dini superdifferential(subdiffernetial)이라고 하며, df(x;v)>=<ζ,v> (df(x;v)<=<ζ,v>)을 만족하는 ζ에 대한 집합이다. HJB방정식은 elliptic equation이기 때문에 comparison principle과 visocity solution이 동치며, 이는 여러방법(perron’s method 등)을 통해 보일 수 있다. 즉, visocity solution은 존재성을 증명하는데 상대적으로 쉽다. Proximal gradient는 몇 가지 가정이 성립한다면 유일성이 보장되며, 헤밀토니안 H(x,p)가 (x,p)에 대해 연속, convex in p, 그리고 control u가 locally Lipchitz이면 proximal solution과 visocity solution은 동치가 된다. 이는 적절한 조건하에서 HJB방정식의 해가 존재하며 유일하다는 것을 증명할 수 있으며, 이로 인해 global optimal control의 존재성을 보일 수 있다.